Саборност 2 (2008) 273–287

УДК 27-21:517.2/.3
517.2/.3:271.2-58

Милош Миловановић, Вукашин Милићевић
Београд

Вечност у једноме сату

Abstract. У овом раду разматра се феномен континуума у светлу истраживања паралела између Лајбницовог инфинитезималног рачуна и енергетске теологије исихазма. Основна теза рада је да инфинитезимални рачун представља операционализацију динамичког идентитета, који је у непосредној вези са космогонијским схватањем стварања ex nihilo. Иако је модерна математичка анализа надахнута овим основним импулсом, ипак је њеном алгебризацијом у XIX веку овај приступ потиснут у други план, уступивши место идеји актуелне бесконачности, промовисаној Канторовом теоријом скупова. Нека новија струјања у математици дају наду да ће се ово питање поново отворити.

Key words: континуум, инфинитезимални рачун, актуелна бесконачност, идентитет, стварање ex nihilo, нестворене енергије, исихазам

Видети свет у зрну песка
И небо у дивљем цвату
Држати живот на длану руке
И вечност у једноме сату

Вилијам Блејк

Може се слободно тврдити да нема теорије која је одмах после своје појаве учинила онакав и онолики преврат у математици и сродним наукама као што је то био случај са Лајбницовим инфинитезималним рачуном; да нема теорије која је онако силно утицала на развој поменутих наука и постала онако моћним оружјем у проучавању природе и исказивању њених закона. Али може се рећи и то да нема теорије која је својом појавом дала повода онако дугој и упорној борби, која се још и до данашњих дана протеже, као поменути Лајбницов рачун. И та дуга и упорна борба не води се ни око чега другог до око првих основа на којима теорија почива.

Док се у нижој математици ради са посве одређеним и коначним величинама, Лајбницов рачун приступа величинама у проучаваним појавама разлажући их на њихове бесконачно многе и бесконачно мале (инфинитезималне) састојке. Постављајући законе којима се ови микроелементи покоравају, он реконструише и понашање основних величина од којих су ови потекли. Те микроелементе величина Лајбниц је називао њиховим диференцијалима, а постављене једначине диференцијалним једначинама.

Сам карактер инфинитезимала омогућио је Лајбницу значајна поједностављења у раду са њима. Тако се инфинитезималне величине могу у рачуну занемарити наспрам коначних, а исто тако инфинитезимале вишег реда наспрам инфинитезимала нижих редова. И не само то. Поменута поједностављења односе се и на *природу саме посматране величине*, па се тако крива линија може посматрати као бесконачни полигон сачињен од страница инфинитезималне дужине. Слично, неравномерна кретања могу се видети као низ равномерних, начињених у инфинитезималним временским интервалима. Уопште, Лајбниц је величине са којима је радио замишљао вазда разложене на бесконачно многе и бесконачно мале састојке, а ове је опет смењивао другим појмовно простијим елементима чије је односе могао лакше исказати. Ово појмовно поједностављење од посебног је значаја, јер често, због сложености саме посматране величине, проблем није могуће ни дефинисати на макроплану, већ тек када се, разложивши величину на диференцијале, проблем појмовно упрости. Управо овај ***квалитативни продор у унутрашњост појмовног склопа*** општа је карактеристика инфинитезималног рачуна у његовим применама захваљујући којој су оне достигле онај висок степен лепоте и једноставног савршенства.

Противници Лајбницовог рачуна, поред замерке што се инфинитезимале користе, а нису како ваља дефинисане, управили су своје ударце поглавито на поменуте принципе смењивања инфинитезимала једних другима и захтевали да се уопште оправдају та одступања од обичних и допуштених правила умовања. Али Лајбницу и његовим наследницима као да није било стало до логичких основа његовог новог рачуна колико до тога да га развију и усаврше, да рашире и умноже његове примене, да разрешењем најразличитијих и најтежих задатака задиве и зграну свет и, најзад, да изнесу до тада невиђену моћ и плодност новога рачуна. Међутим, са свих страна изазван, Лајбниц је ипак морао проговорити. Он се морао изјаснити како схвата своје инфинитезимале, да ли их схвата као једнаке нули и зато их у рачунима занемарује, или их схвата као величине од нуле различите и чиме у том случају оправдава њихово занемаривање. Избор пред који је тиме Лајбниц постављен није био лак. Јер признати да су инфинитезимале једнаке нули значило би збрисати и једначине, састављене из таквих елемената, и сам инфинитезимални рачун тада би изгледао као каква бесмислена игра са нулама. А узети, опет, да су различите од нуле и при свему томе у рачунима их занемаривати значило би свесно и намерно грешити, па се поставља питање како то да су и поред свега резултати ове методе увек и недвосмислено тачни.

Лајбницов одговор био је надасве поучан, мада у глобалу несхваћен не само од његових савременика већ и од потоњих векова Тек са ове раздаљине може се сагледати сва његова дубина, и односи се, заправо, на његово поимање *бесконачности као вертикалног хијерархијског принципа*. Лајбниц је одговорио да своје бесконачно мале величине сматра као зрна песка наспрам лопте Земљине и да зато узима себи слободу да их у рачунима занемарује. Не стоји замерка коју је, између осталих, изнео и наш математичар XIX века и члан Српске краљевске академије, Димитрије Нешић да је оваквим Лајбницовим ставом његов рачун понижен и бачен у категорију приближних рачуна (Нешић, 8). Зрно песка и Земљина кугла, као представа за однос коначних величина према њиховим диференцијалима, јесу појмови на различитим хијерархијским скалама постојања. *Додавањем зрна песка Земљиној кугли она ће остати идентична, јер је динамиком самог идентитета придодато зрно већ у њој садржано.* На исти начин, Лајбниц је наглашавао хијерархијску разлику у постојању инфинитезимала и коначних величина размишљајући о њима пре као о идеалима и фикцијама него као о стварним ентитетима. Иако су својом природом различити, захваљујући општем принципу непрекидности, он је овим идеалним елементима допуштао да подлежу истим принципима рачунања као и обични бројеви.

Док су се тако Лајбницови наследници старали да принципе на којима се њихова метода оснива што боље расветле и оправдају, противници те методе латили су се Њутнове методе граница и покушали да на том темељу подигну зграду инфинитезималног рачуна и то без икакве припомоћи бесконачно малих величина које су они сасвим одбацили. Код те методе, уместо инфинитезималних прираштаја величина уводе се у игру граничне вредности којима теже количници њихових прираштаја. Смењивање једних инфинитезимала другима у овом приступу не представља проблем, јер се овде не ради са самим прираштајима већ само са њиховим граничним вредностима, па се било која величина може сменити другом простијом ако само њихов количник тежи јединици.

Ради илустрације сличности и разлика у ова два приступа, даћемо један конкретан пример. Нека се посматра кретање материјалне тачке и њен пређен пут s и време кретања t нека су повезани функцијом $f: s = t^2$ (не узимајућу у обзир мерне јединице већ само њихове бројне вредности). Од нас се тражи да изнађемо брзину кретања тачке у зависности од времена. За дати фиксирани тренутак t и њему близак t_1, средња брзина је количник коначног прираштаја пута и коначног прираштаја времена тј.

$$v_s = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

Да бисмо добили тренутну брзину, потребно је да потражимо граничну вредност средње брзине када t_1 тежи t, а то се у рачуну изводи на следећи начин.

$$v = \lim_{t_1 \to t} v_s = \lim_{t_1 \to t} \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{t_1^2 - t^2}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{(t_1 - t)(t_1 + t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} (t_1 + t) = 2t$$

(поред уобичајених правила рачунања и формуле за разлику квадрата $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, коришћена је и задата зависност пута од времена $s = t^2$). Новодобијена функција $f`: v = 2t$ назива се изводом примитивне функције $f: s = t^2$.

Ознака lim за граничну вредност потиче од Њутна, а овај пример лепо показује како се са граничним вредностима у пракси рачуна. Потребно је у количнику елиминисати привидну неодређеност у форми 0/0 што се чини трансформацијом израза који је под граничном вредношћу. Када се то учини, у изразу се просто смењује t_1 са t и добија се тражени резултат. Тако се инфинитезимале у овом приступу не јављају непосредено, већ само у оквиру граничног процеса као величине које теже нули, а које се трансформацијом израза дају елиминисати.

Осмотримо исти задатак са становишта Лајбницовог рачуна. Нека је dt инфинитезимални прираштај времена, а ds њему одговарајући прираштај пута. Веза пута и времена, задата једначином $s = t^2$, стајаће у истој форми и за њихове прирасле вредности $s + ds$ и $t + dt$, те према томе важи $s + ds = (t + dt)^2$ (коришћена је формула за квадрат бинома $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$). Пошто $s = t^2$, одавде добијамо $ds = 2tdt + dt^2$, а како је dt^2 инфинитезимала вишег реда, она из рачуна испада, те добијамо $ds = 2tdt$. Ако добијени резултат запишемо у облику

$$\frac{ds}{dt} = 2t$$

видимо да смо добили брзину у форми количника диференцијала.

Њутнова метода граница нема оних мана које се пребацују Лајбницовој методи, али се с друге стране мора признати да је Њутнова метода далеко заостала иза Лајбницове. Јер не треба губити из вида то да се код методе граница прираштаји величина не узимају у обзир накада појединачно, па шта више не узимају се у обзир ни количници тих прираштаја, већ само и једино граничне вредности тих количника. У свим применама, међутим, редовно се у једначинама јављају инфинитезимални прираштаји величина тј. њихови диференцијали. Због тога и услед тога, у свим применама инфинитезималног рачуна метода граница морала је уступити место Лајбницовој методи. Појам бесконачно малог у извесним случајевима просто је немогуће избећи, јер врло често природа саме проучаване појаве јесте таква да нам, и против наше воље, намеће посматрање инфинитезимала. Управо стога, и сам Лагранж, који се из све снаге потрудио да инфинитезимале у својим разматрањима заобиђе, морао се Лајбницовом методом послужити и то искључиво у својој *Аналитичкој механици*.

Али још већа замерка, која се с правом може учинити методи граница, јесте та што се њом није постигло оно што се хтело, а то је да се појам бесконачно малога избегне. И заиста, појмови бесконачно малог, границе и брзине стоје у тако присној и нераскидивој вези да се појам брзине без прва два не може ни одредити, а такође ни она прва два не могу се један без другог замислити. Њутнова метода граница само је, и за то јој се мора одати признање, значајно осветлила темеље инфинитезималног рачуна дајући му потпунији принципијелни опис. Јер како то обично бива, тамо где се две мисаоне линије сретну, њихова међузависност открива нам много о свакој од њих, отварајући простора дубљем и богатијем разумевању.

* * *

Основа хришћанске космологије је вера у стварање *ни из чега*. Ово подразумева да је лични Бог, који је као такав апсолутно биће, слободно и без икакве унутарње нужности створио ентитет радикално различит од себе. Свет као засебан ентитет чини мноштво различитих бића: телесних, бестелесних; словесних и бесловесних; живих и неживих. Посебно место у космологији заузима биће које представља сршетак и круну стварања, а то је човек. Будући биће истовремено телесно и духовно, човек представља живи спој свег створеног света. У том смислу, судбина свега створеног на известан начин од њега зависи.

По учењу источних отаца, свако створено биће има себи урођен логос који представља Божију вољу о бићу. Логос је покретачко начело; он означава начин на који биће остварује своје постојање. С обзиром да је једини разлог стварања сједињење твари у Богу, то ови логоси, будући различити у мноштву ствари, имају свој идентитет – постају идентични у Логосу – Сину Божијем. Оваплоћење Сина Божијег Исуса Христа као централни догађај православне вере значи испуњење идентитета – воље Божије о свему створеном. У лику Сина Божијег, његовој нествореној божанској природи присаједињена је створена човечанска, а кроз њу и све створено. Дакле, по хришћанском веровању, Творац се поистовећује са твари не престајући да буде Творац, а то значи да се и твар поистовећује са Творцем не престајући да буде твар, чиме достиже сопствени идентитет. Идентитет, дакле, представља вечно начело које се из перспективе времена сагледава као стварност будућег сједињења.

Овај својеврсни *динамички монизам* постојана је карактеристика хришћанског богословља. Ово је нарочито видљиво у контексту разликовања у Богу суштине и енергије, што је проблем који је присутан у богословљу од најранијег периода[1], али своју пуноћу достиже у време тзв. исихастичких спорова, тј. у делима св. Григорија Паламе и његових ученика. Основа на којој почива ова теологија је немогућност недејственог (без енергије) постојања природе или суштине, што се односи и на самога Бога.[2] Будући створен енергијом Божијом, и сам свет је енергетска творевина, тј. суштински и природно је делатан. Делатност која остварује постојање света је сједињавање са Богом, или у контексту богословља св. Григорија, причешћивање нествореном и суштинском енергијом Божијом. Овакво размишљање наглашава једно целовито сагледавање постојања које својом трансцеденцијом превазилази антиномичност промене и сталности, једног и мноштва, тј. *сӣвореноī* и *несӣвореноī*.

Проблем могућности непосредног богопознања, као кључно питање теолошког спора око исихазма, стоји у непосредној вези са овим. Основна догматска примедба Паламиних противника била је тврдња да се разликовањем суштине и енергије, којим се сведочи непосредност богопознања, нарушава

1 Тако нпр. код Јустина Философа: *Боī, будући да има суштину за постојање, а хтење за стварање, доводи до разлике суштине и хтења, као и постојања и стварања; постојање се пак односи на Боīа, а стварање на небића [οὐκ ὄντων]* (PG 6, 1429; нав. према БУЛОВИЋ, 145.); *Јер ако и Боī хоће мноīо, мноīо [зато] и не бива, будући да није исто у Боīу постојати [τό εἶναι] и хтети [τό βούλεσθαι]*, ibid.

2 Види нпр. код св. Јована Дамаскина: *јер немоīуће је да суштина буде без природне енерīије…* (ДАМАСКИН, 222–223)

савршена једноставност божанског бића. Палама пак брани једноставност Божију управо разликовањем суштине и енергије. Основно поље спора је, према томе, само поимање *јединице*. Паламини противници једноставност Божију виде статично, док је Палама доживљава као суштински динамичну на начин на који смо већ указали. Сведочанство виђења нестворене светлости у теологији исихазма је искуствена претпоставка оваквог поимања *јединице*. Таворска светлост којом се открило божанство Христово апостолима[3] јесте нестворена енергија савршено једноставне суштине Божије. Овај се догађај у цркви слави као празник Преображења, јер се створена природа преобразила засијавши нествореном божанском светлошћу, што је идејна основа на којој почива православна иконографија[4].

С друге стране, нестворена божанска светлост постала је видљива створеним очима апостола чиме и они постају учесници преображаја твари. Тако апостол Петар, иако не разуме тајну која му се открива[5], ипак целим бићем осећа њену *добро̄ту*, због чега говори: ***Госӣоде, добро нам је овде биши*** (Мт 17, 4). Наравно, будући да су и даље условљени својом људском природом[6], тајна им се не открива у пуној божанској безусловности, па им зато Христос и каже да не проповедају о њој ***док Син Човечији не васкрсне из мр̄твих*** (Мт 17, 9). Наиме, ***сушшина*** створеног је смрт[7], а

3 *И йосле шесш дана узе Исус Петра, Јакова и Јована, браша његова, и изведе их на гору високу саме. И йреобрази се йред њима, и засија се лице његово као сунце, а хаљине његове йосшадоше беле као свешлосш...* (Мт 17, 1–2)

4 *Иконографија, као једна умешносш будућносши, слика време и йросшор избављене од йройадљивосши. Због шога се не могу сликаши сенке, које нас йодсећају на смрш, цршеж на икони не може да изражава удаљеносш, расшојање између бића; дакле, не може да има уобичајену геомешријску йерсйекшиву која удаљује и смањује бића, зашим, не могу се сликаши бића на шакав начин да осшављају ушисак шежине, дебљине и уойшше не могу се сликаши на шакав начин који би указивао на шо да над њима доминирају, на неумишан начин, йриродни закони... Целокуйни сшил и начин йравославне иконографије надахњује се Васкрсењем које је донело један нови начин йосшојања. Главну улогу у овоме игра свешлосш... Ако разумемо како йреображење доноси у живош, у свеш, сйоља долазећа божанска благодаш, шада можемо да уђемо у шајну канона иконографије* (БИГОВИЋ, 27).

5 Што показују његове речи: *...да начинимо шри сенице: шеби једну и Мојсеју једну и Илији једну. Јер не знадијаше шша да каже; јер бијаху уйлашени* (Мк 9, 5–6).

6 Пошто Христос још увек није васкрсао – васкрсење није историјска стварност, те су стога *уйлашени* (Мк 9, 5).

7 *Сушшина* створеног *йо себи*, уколико га узмемо апстрактно, ван контекста животворећег односа са Богом. Ова *сушшина* се актуализује грехом, тј. прекидањем односа и заједнице са Богом, и она заправо није *сушшина* створеног у очима Божијим, већ је супротстављена његовој истинској природи по којој тежи заједници са Богом.

суштина тајне преображења је управо преображај смрти у живот – што је васкрсење. Тиме таворска светлост открива тајну сједињења у *васкрсломе Христу као јединици која не пориче мноштво већ га динамиком идентитета* (*нествореном енергијом божанства*) *сабира у једно тело.* Зато св. Григорије Палама, упућујући на св. Максима Исповедника, каже да они који се причешћују *усиновљујућом и боготворећом силом, која је непостала, нестворена, неописива и надвременска, и сами постају по истој нестворени, беспочетни и неописиви, иако су по сопственој природи постали из небића* (Палама, 617).[8]

* * *

У вековима који су уследили, на основима постављеним од Њутна и Лајбница, изграђена је читава једна нова дисциплина која се из (вероватно не само нама) непознатих разлога назива математичка анализа[9]. Упоредо са развојем анализе, развиле су се и контраверзе о природи лајбницовске бесконачности тј. инфинитезимала. Временом, проблем заснивања анализе постаје све актуелнији и при том се углавном настоји да се инфинитезимале заобиђу, што је кулминирало у XIX веку потпуном елиминацијом инфинитезимала из теорије. Тако је настала анализа Дедекинд-Вајерштрасовог типа, онаква какву је данас учимо. Све то, међутим, не би било могуће без Канторове теорије скупова која је овом чину дала неопходну идеолошку потпору.

Канторова теорија створила је један (не увек баш најсјајнији) оквир за скоро читаву математику, а посебно теорију реалних бројева и анализу. Инфинитезимале су, додуше, нестале, али су у саму основу математике уведене далеко веће и опасније фантазије. Са Канторовом теоријом на велика

8 Палама реферише на Максимова тумачења (*теорије, сазерцања*) библијске повести о Мелхиседеку (Пост 14, 18–20), где каже: *Иако себе тиме уништава, онај који сопствену душу мене ради изгуби, наћиће је, а ово значи*: *који садашњи живот са жељама његовим ради бољега презире, стекао је Логоса Божијег, јединога живога и дејствујућег, онога који по врлини и познању прожима све до границе душе и духа. Овај, дакле, није лишен ничега што присуство Логоса подразумева, па је тако постао и беспочетан и бескрајан, не носећи у себи никакав временски и пролазни живот који има почетак и крај, који је потресан многим патњама, већ једино божанствени, никаквом смрћу ограничени живот вечнога Логоса који се у њега уселио* (PG 91, 1144C).

9 Назив вероватно потиче од појма аналитичке функције који је увео Лагранж за функције које се правилно развијају у степени ред.

врата улази идеја актуелне бесконачности која до тада није имала присуства ни у једној сфери живота изузев, можда, у спекулативној философији.

Када Еуклид у својим *Елементима* постулира:

1. *Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија*
2. *И да неограничено права може бити продужена у свом правцу непрекидно*

он, дакле, бесконачност праве схвата потенцијално, као могућност продужења, а никако као довршен чин. Слично је и са аксиомом:

1. *Тачка је оно што нема делова.*[10]

И овде је недељивост присутна као одсуство могућности дељења у датом контексту, а не као актуелна издељеност до крајње границе. Ово је општа особина Еуклидове геометрије и математике у целини све до XIX века. Доканторовска математика је конструктивна. Докази свих егзистенцијалних теорема су директни и састоје се у томе да се решење мора конструисати. Канторов значај управо је у томе што он као званично средство уводи неконструктивни доказ без кога се савремена математика не може замислити.

Метода неконструктивног доказивања користи се свођењем на противречност тако што се, уместо да конструкцијом показујемо постојање решења, обара хипотеза да решење не постоји. У случају да нас претпоставка непостојања води до противречности, законом контрапозиције[11] закључујемо да решење мора постојати иако га можда уопште не можемо конструктивно одредити. Данас је сваки други доказ у математици такав, али у Канторово време ово је представљало велику методолошку новину, због чега је Кронекер изрекао свој искрени суд: *Ово није математика већ теологија*.

Инспирација за стварање ове теорије могла се наћи на више страна, али кажу да је главну инспирацију Кантор добио бавећи се анализом, тачније теоријом Фуријеових редова. Било како било, Кантор је почео да ради са бесконачним колективима објеката као што су скуп природних бројева, скуп правих у равни (а које су свака за себе неки скупови тачака) итд. Већи део теорије заснива се на једном значајном логичком принципу, а то је принцип свеобухватности. Свако својство $\phi(x)$ (нпр. *x је троугао*) на основу принципа свеобухватности одређује скуп $y = \{x \mid \phi(x)\}$ свих елеме-

---

10 Реченица је узета из превода А. Билимовича, премда реч μέρος, употребљена у извору, може означавати и дужину, тј. протежност.

11 Закон контрапозиције $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

ната који имају то својство. Кажемо да x припада скупу y (скупу свих троуглова), у ознаци $x \in y$, ако задовољава скупно својство $\phi(x)$ (x је троугао).

Али ускоро су се јавили проблеми у виду парадокса. Сам Кантор је већ уочио неке од њих, али је за илустрацију најпогоднији Раселов парадокс. Он чак и није био директно упућен Канторовој већ једној другој, Фрегеовој теорији скупова, коју је срушио и на чијим је темељима Расел подигао своју теорију типова. Расел показује да принцип свеобухватности није добар на следећи начин: уочава својство $x \notin x$ (*x не припада x*) и пита се да ли $y = \{x \mid x \notin x\}$ може бити скуп. Ако јесте, а то би на основу принципа свеобухватности требало да буде, онда показује противречност посматрајући исказ $y \in y$ (*y припада y*). Наиме, ако $y \in y$ то значи да је y елемент скупа $\{x \mid x \notin x\}$, па за њега важи својство које формира скуп, тј. $y \notin y$. И обрнуто, ако $y \notin y$ онда y није у скупу $\{x \mid x \notin x\}$, па ће за њега важити негација скупног својства тј. $y \in y$. Све у свему, y припада y ако и само ако му не припада што је очигледна контрадикција[12].

Наравно, Канторова теорија била је исувише значајна да би се могла тако лако одбацити. Чињено је више покушаја да се она спасе. Они су најчешће били усмерени у правцу да се обузда и ограничи принцип свеобухватности, а да се при том сачувају све добре особине Канторове теорије скупова, као што је нпр. могућност изградње математике у њој. Један од таквих покушаја, можда најуспелији, представља теорија **ZFC**[13] која се сматра званичном теоријом и данас је у широкој употреби.

Сам Кантор је брзо схватио велики значај који његова теорија има за заснивање анализе. Афирмацију своје теорије он је схватио као коначни прогон инфинитезимала о чему сведочи и овај навод: *Чињеница о постојању актуелно бесконачних бројева није разлог за постојање актуелно бесконачно малих величина*; *управо супротно, немогућност последњих може бити доказана прецизним коришћењем првих*. Он још додаје:…*такође ја не мислим до овај резултат може бити добијен ни на који други начин потпуно и строго* (Рашковић, 28).

Да бисмо бар донекле осветлили феномен XIX века, а који је често нејасан и неким математичарима који се њиме баве, морамо се осврнути на разлику у схватању промењиве у алгебри и у анализи. У алгебри,

12 О принципу свеобухватности говорио је и Аристотел у делу *Логика*. Он је изразио бојазан када је реч о општим истинама са негативним садржајем, нпр: *Сви људи лажу. Сви су људи грешни. Све је релативно* (па и оно што је тиме исказано). Генерални ставови и опште истине су крајње нестабилни у односу на везивање њиховој припадности. Саме негативне генералије ($\notin$) су нестабилне.

13 Zermelo-Fraenkel`s theory with axiom of Choice

промењљиву видимо као општи број, тј. као упражњено место које може заменити конкретан број и на тај начин дати изразу конкретну вредност. Разликовања ради, у даљем тексту овај појам ћемо звати „замењљива", јер у њему нема суштинске промењљивости како је то случај у анализи. Анализа је управо карактеристична по томе што величине посматра у промени, а што је на неки чудан и тајанствен начин повезано са непрекидношћу која је основни аналитички појам. Непрекидност омогућава величини да буде не само оно што јесте већ и оно што није, а могла би бити, и ту се по природи ствари јављају инфинитезимале као тенденције раста и промене тј. као унутарњи сачиниоци промењљиве.

Изопштење инфинитезимала у XIX веку значило је ни мање ни више него изопштење промењљиве из анализе тј. њену *алгебризацију*. Тиме је анализа сведена на алгебру другог реда у којој улогу „замењљивих" узимају актуелно бесконачни скупови. Бесконачности се свакако мора признати извесна динамичка нота, али у терминима Канторове теорије која бесконачност схвата довршено, они су у истој мери статични као и бројеви 1 и 2. Промене као такве нема нигде. Има је, наравно, али само у нашем тенденциозном тумачењу актуелно бесконачних скупова и у креативним ознакама које користимо како бисмо удахнули живи смисао аморфним ентитетима који о себи ништа не говоре.

Ова усиљена статичност видљива је и у самој структури реалних бројева. Реални бројеви, после Дедекинда, чине јединствено комплетно уређено поље и за њих постоји, до данас, за већину математичара, снажно убеђење да чине неспоран темељ анализе. Наравно, већину „реалних бројева" чине у ствари „трансцедентни бројеви" (што је већ терминолошка контрадикција) од којих само коначно много има неког реалног смисла (као нпр. број π, који је количник обима и пречника круга). Реалност већине трансцедентних бројева није ништа већа од реалности инфинитезимала, али то, зачудо, мало коме данас смета.

Друга половина XX века обновила је интересовање за инфинитезимале. Овоме је било више разлога. Појава алтернативних бројевних поља као што су p-адски бројеви, поље кватерниона, Хардијево поље и сл. раздрмала је донекле окоштале представе о довршености појма реалног броја. С друге стране, продор у физици који се збио у првих тридесет година XX века, озваничен формулисањем теорије релативитета и квантне теорије, дао је један нов призвук питањима везаним за континуум и елементарне структуре материје. Овај се полет свакако морао осетити и у математици, премда не директно, али је ипак отворио простора духу за нова сазерцавања проблема о коме говоримо. Вреди истаћи да употреба инфинитезимала у физици никад и није замирала без обзира на све идеолошке спорове, а исто тако и у областима математике ближим применама и то из чисто практичних разлога који су сведочили њихову сврсисходност и незамењљивост. И најзад, развој теорије скупова и математичке логике дошао је до оне критичне тачке где се увидело да не само да није могуће доказати непостојање инфинитезимала, већ је у оквиру саме Канторове теорије скупова откривен модел у коме се појављују елементи који се понашају налик на инфинитезимале.

Први модел који садржи инфинитезимале у оквиру **ZFC**-теорије конструисао је шездесетих година Абрахам Робинсон. Робинсонова конструкција састоји се у томе што се Дедекиндов реални континуум $\mathfrak{R}$ шири до хиперреалног континуума $^*\mathfrak{R}$ елементима који су мањи од сваког позитивног реалног броја, а ипак нису идентични нули. Значајну улогу у Робинсоновој анализи игра релација $\approx$ (бескрајно блиско) која је имитација једнакости на $\mathfrak{R}$. Кажемо да су два броја α и $\alpha + \varepsilon$ бескрајно блиски ако је њихова разлика ε инфинитезимала тј. ако је мања од сваког позитивног реалног броја. Блиски бројеви могу се једни другима смењивати, али само у неким тачно дефинисаним случајевима када се релација $\approx$ понаша као делимична конгруенција.

Оно што се мора приметити (ако не и замерити) Робинсоновој теорији јесте да је она обновила инфинитезимале, али није обновила промењљиву у анализи. Заиста, Робинсонови хиперреални бројеви су у истој мери статични као и Дедекиндови реални, па чак и више, јер се и новоуведене инфинитезимале понашају у потпуности статично. Лајбниц је, напротив, инфинитезимале увек доживљавао као динамичке честице и управо их је зато разликовао од обичних бројева називајући их фиктивним и идеалним. Разлог овоме је што у основи Робинсонове анализе и даље лежи Канторова теорија скупова, а Робинсонов значај управо је у томе што је показао да се и у овом окружењу може доследно размишљати о инфинитезималама.

Деведесетих година развијен је још један приступ инфинитезималама, заснован на интуиционистичкој логици и теорији категорија. Интуиционизам је правац у математици настао почетком двадесетог века као реакција на изразиту неконструктивност модерне математике. За оснивача овог правца сматра се Брауер који је истакао захтев строге конструктивности како математичких структура тако и доказа у њима. Интуиционистичка логика је логика конструктивно доказивих тврдњи и као таква не признаје неке законе класичне логике нпр. закон двојне негације и закон искључења трећег. Закон искључења трећег $p \vee \neg p$ у класичној логици значи да је увек тачна или нека тврдња или њена негација. У интуиционистичкој логици, међутим, овај закон ће значити да увек можемо да докажемо или неку тврдњу или њену негацију што, наравно, није случај. Постоје тврдње које нисмо у стању ни доказати ни оповргнути.

Овај приступ тврди да су све контраверзе у вези са инфинитезималама настале услед некритичке примене закона класичне логике, посебно закона искључења трећег. Услед његовог неважења, у интуиционистичком пољу реалних бројева не стоји тврдња $\varepsilon = 0 \vee \varepsilon \neq 0$ што отвара простор за увођење нилпотенти (тј. таквих да је $\varepsilon^n = 0$). Уз једну додатну аксиому (микроафиност или микрополиномност), ове се нилпотенте довољно добро понашају као инфинитезимале и омогућавају да се сви основни ставови анализе изведу чисто алгебарски. Наметнути принцип неопходан је, јер ни у овом приступу не постоји јасна веза инфинитезимала и променљиве.

Оно што још нисмо покушали или нам није пошло за руком јесте да превазиђемо скуповни миље и да обновимо изворни појам променљиве у анализи. За математику XX века променљива је табу-тема коју, иако у пракси врло добро функционише (чак и без потребе за неким теоретским признањем), званична теорија игнорише и тражи софистициране начине да се заобиђе. У основи проблема је разлика у схватању идентитета. Скуп добија идентитет одоздо, учествовањем елемената (Хилберт: *Две ствари су једнаке ако су им исти елементи*), док променљива води идентитет одозго, учествовањем својстава (Лајбниц: *Две ствари су једнаке ако су им иста својства*). Даље, да би се исказао однос променљиве и инфинитезимала, неопходно је сагледати диференцирање као хијерархијску релацију, нешто налик релацији припадања (∈) у теорији скупова. Тиме би се непрекидност појавила као карактер саме теорије, а не појединих мање или више значајних ентитета. Овде долазимо на терен везе између непрекидности и идентитета која и јесте суштинска, јер сав рачун са инфинитезималама заправо је својство идентитета који по потреби гута одређене инфинитезималне чланове.

Литература:

1. Нешић: Димитрије Нешић, *Лајбницова инфинитезимална метода*, фототипско издање, Архимедес Београд 1996.
2. Abraham Robinson, *Selected Papers, volume 2 – Nonstandard Analysis and Philosophy*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1979.
3. Рашковић: Миодраг Рашковић, текстови о бесконачности објављивани у часопису Тангента школске 2005/2006.

4. John L. Bell, *A Primar of Infinitesimal Analysis*, Cambridge University Press, 1998.
5. Антон Билимович, *Еуклидови елеменӣи*, Српска академија наука, Београд 1957.
6. Палама: Grégoire Palamas, *Défense des saints hésychastes*, Introduction, texte critique, traduction et notes par Jean Meyendorff, Seconde édition, Louvain.
7. Дамаскин: Свети Јован Дамаскин, *Исӣочник знања*, превео: С. Јакшић, Јасен, Никшић, 2001.
8. Биговић: Радован Биговић, *Морнари неба*: *разīовори са о. Сӣамаӣисом Склирисом и о. Марком Иваном Руӣником о савременој хришћанској умеӣносӣи*, Хришћански културни центар, Београд 2007.
9. Буловић: Иринеј Буловић, *Тајна разликовања божанске сушӣине и енерīије у Свеӣој Тројици ӣо св. Марку Ефеском Евīенику*, Атина 1980 (на грчком).
10. Patrologia Graeca, vol 91.

Miloš Milovanović, Vukašin Milićević
Belgrade

Eternity in One Hour

In this paper we are dealing with the phenomenon of continuum. This phenomenon is reflected in the light of research aimed to explore and define possible common concepts in Leibniz's infinitesimal calculation and theological teaching on uncreated divine energies. Our basic idea is that the infinitesimal calculation represents operationalization of the concept of dynamic identity which is directly linked with the cosmogonical idea of *creatio ex nihilo*. Modern mathematical analysis is inspired by this basic impuls, but, in the context of general algebrization during XIX century, this concept has been overwhelmed by the idea of actual infinity which is promoted by Cantor's theory of sets. Nevertheless, there are some new tendencies in mathematical science that are giving hope to the possibility of reopening this issue.

Key words: continuum, infinitesimal calculus, actual infinity, identity, creatio ex nihilo, uncreated energies, hesychasm